(301) 通信工学

多相相補系列セットの論理関数の導出について

On Derivation of Logic Functions of Polyphase Complementary Sequence Sets

竹原　周太朗 † 黒田　翔 † 松藤　信哉 † 松元　隆博 † 井田　悠太 †
Shutaroh Takehara † Sho Kuroda † Shinya Matsufuji † Takahiro Matsumoto† Yuta Ida†
† 山口大学　創成科学研究科

概要

相補系列は，2 つの系列からなり，それらの同じ位相シフトの非周期自己関数の和が理想的なインパルス特性を有する．また，その完全相補系列とは，系列対とそのメイトとなる対の相互相関関数の和が零となる系列セットである．また，その拡張として，複数系列からなる相補系列セットも議論されている．相補系列は自己相互相関関数が理想的な相関特性を有するので，通信のみならず，電子透かしなどが議論されている．

本稿では，多相相補系列セットの論理関数を導き，それらの性質を考察する．相補系列セットの構成法のさらなる一般化を検討することで，多くの系列を生成することができ，大規模なシステムに適用できる．また，論理関数から容易に発生器や全ての受信シンボルと全てのセットとの相関をとることができるマッチドフィルタバンクが構築できる．

1　はじめに

相補系列は、2 つの 2 相系列の非周期自己相関関数の和が位相シフト零以外で 0 となる理想的なインパルス特性を有する系列対である [1][2]．また、それらの多相系列への拡張や多次元化，あるいはそれらを容易に生成できる論理関数について議論されている [3]-[7]．さらに，完全相補系列は，相補系列間の対応する系列の相互相関関数の和が全てのシフトで 0 になる系列セットを意味し，以下，これを相補系列セットと呼ぶ．

Teng らは複数系列からなるサブセットの集合である 2 相相補系列セットの構成法を示している [8]．また，末広は，任意の長さ N^n の N 個の系列からなる N 個のサブセットで表される一般化した多相相補系列セットを構成している [9]．これは，レーダーや同期系列だけでなく，CDMA 方式の拡散系列や電子透かしなどへの応用も検討されている [10]．

本稿では，末広の構成法を基にして，整数環上の論理関数を導き，その上で，それらの一般的な構成法について考察する．2 節では，本稿で必要な基本事項であるベクトルやアダマール行列を説明し，相補系列セットを定義する．3 節では，末広が示した相補系列セットの構成法を概説し，それを行列で表現する [9]．さらに，論理関数の導出は，構成法を明確化し，発生器やそれらの相関処理可能なマッチドフィルタバンクを与えることが可能である．4 節では，その行列表現から論理関数を導出し，さらに，長さ $N = q^m$ の q 相相補系列セットの論理関数を導く．さらに，相補系列セットのいくつかの例を示し，さらなる一般化を検討する．

2　相補系列セットとは

2.1　準備

本節では，相補系列セットの基となる全ての要素が絶対値 1 からなるユニタリ行列 (複素アダマール行列) について述べる．ここで，q は適当な正整数を示し，$q = 2$ の 2 相系列や $q = 2$ あるいは $q = 4$ の 4 相系列セットも含まれる．

整数 q を法とする剰余類とし Z_q と書くことにする．Z_q 上の次数 n のベクトルを

$$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \in V_q^n \tag{1}$$

と置く．ここで，ベクトル $\boldsymbol{x}$ は整数 $x(0 \le x < q^{n-1})$ を q 進数展開して得られる係数ベクトルであり，

$$x = x_0 q^0 + x_1 q^1 + \cdots + x_{n-1} q^{n-1} \tag{2}$$

の関係がある．

次数 $N = q^n$ の (複素) シルベスター型アダマール行列は

$$H = [h_{y,x}]_{0 \le x,y < N} = [\omega_q^{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}]_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V_q^n} \tag{3}$$

と表せる．これは，

$$HH^* = H^*H = NE \tag{4}$$

を満足するユニタリ行列である．ただし，$\cdot$ は内積を意味し，$\omega_q = \exp(-2\pi\sqrt{-1}/q)$ と定義され，E は N 次の単位行列を示す．アダマール行列 H は，$N = q$ の時，良く知られたフーリエ変換行列を表す．

2.2　相補系列セット

A を K 個の部分系列セット A^z からなる集合，A^z を長さ L の M 個の多相系列 a_y^z からなる集合とする．

$$\left.\begin{array}{rcl} A &=& \{A^0, \cdots, A^z, \cdots, A^{K-1}\} \\ A^z &=& \{a_0^z, \cdots, a_y^z, \cdots, a_{M-1}^z\} \\ a_y^z &=& (a_{y,0}^z, \cdots, a_{y,x}^z, \cdots, a_{y,L-1}^z) \end{array}\right\} \tag{5}$$

と表わせる．ここで，系列 a_y^z の各要素は絶対値 1 となる．すなわち $|a_{y,x}^z| = 1$ となる．

系列 a_y^z と $a_y^{z'}$ の非周期相関関数は,

$$C_{a_y^z, a_y^{z'}}(\tau) = \begin{cases} \sum_{x=0}^{L-1-\tau} a_{y,x}^{z'} (a_{y,x+\tau}^z)^* & (0 \le \tau \le L-1) \\ \sum_{x=0}^{L-1+\tau} a_{y,x-\tau}^{z'} (a_{y,x}^z)^* & (1-L \le \tau < 0) \\ 0 & (|\tau| \ge N) \end{cases} \tag{6}$$

と定義される．ただし，$*$ は，複素共役や後述する行列の複素共役転置を示す．周期相関関数は

$$\begin{aligned} R_{a_y^z, a_{y'}^{z'}}(\tau) &= \sum_{x=0}^{L-1} a_{y,x}^{z'} (a_{y,x+\tau \bmod L}^z)^* \\ &= C_{a_y^z, a_y^{z'}}(\tau) + C_{a_y^z, a_y^{z'}}(\tau - L) \end{aligned} \tag{7}$$

と表せる．

ここで，A^z と $A^{z'}$ のサブセット間の非周期相関関数を

$$C_A(z, z', \tau) = \sum_{y=0}^{M-1} C_{a_y^z, a_y^{z'}}(\tau) \tag{8}$$

と定義する．集合 A の全てのサブセット間において，

$$C_A(z, z', \tau) = \begin{cases} ML & (\tau = 0, z = z') \\ 0 & (\tau = 0, z \ne z') \\ 0 & (\tau \ne 0) \end{cases} \tag{9}$$

であるならば，A は相補系列セットと呼び，$CS(L, K, M)$ と記す．

ここで，$K = 2$ の 2 相相補系列セットは Golay 系列 [1] として知られている．

3 多相相補系列セットの構成

本節では，末広によって一般化された相補系列セット $CS(L = N^n, K = N, M = N)$ の構成法 [9] を概説し，その論理関数を導く．

3.1 末広の構成法とさらなる一般化

次数 N の複素アダマール行列を

$$B = [b_{yx}]_{0 \le y, x < N} = HG \tag{10}$$

としよう．系列長が N^2 で N シフト毎に非周期自己相関が零となる N シフト直交系列は，上記行列 B の各行を順に並べることにより，

$$\left.\begin{aligned} \hat{b} &= (\hat{b}_0, \cdots, \hat{b}_{\hat{x}}, \cdots, \hat{b}_{N^2-1}) \\ \hat{b}_{\hat{x}} &= \hat{b}_{x_1 N + x_0} = b_{x_1, x_0} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

として与えられる．ただし，

$$\hat{x} = x_1 N + x_0 \quad (0 \le \hat{x} < N^2, 0 \le x_0, x_1 < N)$$

である．次に，N 次の複素アダマール行列を

$$C = [c_{yx}]_{0 \le y, x < N} \tag{12}$$

としよう．互いに相互相関が N シフトで零となる (位数 N の) N 個のメイトからなる集合 D を $N \times N^2$ 行列

$$\left.\begin{aligned} D &= [d_{yx}]_{0 \le y < N, 0 \le \hat{x} < N^2} \\ d_{y\hat{x}} &= d_{y, x_1 N + x_0} = c_{yx_1} \hat{b}_{x_1 N + x_0} \\ &= c_{yx_1} b_{x_1 x_0} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

として表す．

同様に，N 次複素アダマール行列を

$$E = [e_{yx}]_{0 \le y, x < N} \tag{14}$$

としよう．そのとき，長さを N 倍に拡張した相補系列セット $CS(L = N^2, K = N, M = N)$ は

$$\left.\begin{aligned} F &= \{F^0, \cdots, F^z, \cdots, F^{N-1}\} \\ F^z &= \{f_0^z, \cdots, f_y^z, \cdots, f_{N-1}^z\} \\ f_y^z &= (f_{y,0}^z, f_{y,1}^z, \cdots, f_{y,\hat{x}}^z, \cdots, f_{y,N^2-1}^z) \\ f_{y,\hat{x}}^z &= f_{y, x_1 N + x_0}^z = e_{z, x_0} d_{y\hat{x}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

と表せる．

次に，全ての z に対して，f_0^z から f_{N-1}^z の先頭の要素から順にインターリーブすることにより系列長を N 倍に拡張した N シフト直交系列を

$$G_y^z = \begin{matrix} (g_{y,0}^z, & g_{y,1}^z, & \cdots, & g_{y,N-1}^z \\ g_{y,N}^z, & g_{y,N+1}^z, & \cdots, & g_{y,2N-1}^z \\ \cdots, & g_{y,x'}^z & ,\cdots & \\ g_{y,N^3-N}^z, & g_{y,N^3-N+1}^z, & \cdots, & g_{y,N^3-1}^z) \end{matrix} \tag{16}$$

として与える．ただし，

$$g_{y,x'}^z = f_{x_0, x_2 N + x_1}^z = e_{z, x_1} d_{x_0, x_2 N + x_1} \tag{17}$$

と書ける．これは全ての z に対して，F_0^z から F_{N-1}^z の先頭の要素から順番にインターリーブすることで与えられる．ただし，$x' = \hat{x}N + x_0 = x_2 N^2 + x_1 N + x_0$ であり，$y = x_0$ を示す．

次に，N 次の複素アダマール行列を

$$P = [p_{yx}]_{0 \le y, x < N} \tag{18}$$

としよう．式 (15) と同様に，長さが N 倍となる相補系列セット $CS(N^3, N, N)$ を

$$\left.\begin{aligned} A^z &= [A_0^z, \cdots, A_y^z, \cdots, A_{N-1}^z] \\ A_y^z &= (a_{y,0}^z, a_{y,1}^z, \cdots, a_{y,x'}^z, \cdots, a_{y,N^3-1}^z) \\ a_{yx'}^z &= p_{zx_0} g_{yx'} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

として与えられる．式 (16) に戻り，これを繰り返すことにより，さらに N^n 倍の相補系列セット $CS(N^n, N, N)$ に拡張できる．

ここで，定理1は以下の予想ができる．式(16)の操作において，1つとび($N^0=1$)だけではなく，$N^1, N^2, \cdots, N^{n-1}$個とびずつインターリーブしていくように相補系列セットを生成可能であるようである．例えば，式(17)においてNとびすることは，

$$g^z_{y,x'} = f_{x_1,x_2N+x_0} = e_{z,x_0} d_{x_1,x_2N+x_0} \quad (20)$$

であり，N^2とびすることは，

$$g^z_{y,x'} = f_{x_2,x_1N+x_0} = e_{z,x_0} d_{x_2,x_1N+x_0} \quad (21)$$

と与えられる．すなわち，一般的には式(16)のN倍拡張した系列長$L = N^{m+1}$とするとき，

$$x' = x_m N^m + x_{m-1} N^{m-1} + \cdots + x_1 N + x_0 \quad (22)$$

と置くと，式(17)は，

$$g^{y,x'} = f^z_{x_k,\hat{x}} \quad (23)$$

である．ただし，

$$\begin{aligned} \hat{x} = x_m N^m &+ \cdots + x_{k+1} N^{k+1} + x_{k-1} N^{k-1} \\ &+ \cdots + x_1 N + x_0 \end{aligned} \quad (24)$$

であり，$0 \le k \le m$とすれば良い．

4 相補系列セットの公式化

ここで，末広らが一般化した相補系列セットの論理関数の予想を立てることができる．なぜなら，アダマール行列は各行，各列の入れ替えも又アダマール行列であり、インターリーブは1つとび($N^0=1$とし)だけではなく，N^1, N^2とびとしても性質は変わらない．さらに相補系列セットを拡張，一般化できると考えられる．本稿では，さらに相補系列セットの論理関数の予想をたててみた．

最初に，多相相補系列セット$CS(N^n, N, N)$の論理関数を公式化し，さらに$N = q^m$のときに拡張する．

4.1 論理関数の表現

式(10)のN次アダマール行列を，

$$\left.\begin{aligned} B &= [b_{yx} = \omega_q^{h^B(y,x)}] \\ h^B(y,x) &= x \cdot y + g^B(x) \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

とする．ただし，$\omega_q^k = e^{-\frac{j2\pi}{q}k}$である．ここで$x, y$は$0 \le x, y < N-1$である．式(11)の$\hat{b}$は，

$$\hat{b}_{\hat{x}=x_1N+x_0} = \omega_q^{h^B(x_1,x_0)} \quad (26)$$

と表せる．式(12), (14), (18)のN次複素アダマール行列を式(25)と同様に，

$$\left.\begin{aligned} C &= [c_{yx} = \omega_q^{h^C(y,x)}] \\ h^C(y,x) &= x \cdot y + g^C(x) \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} E &= [e_{yx} = \omega_q^{h^E(y,x)}] \\ h^E(y,x) &= x \cdot y + g^E(x) \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

$$\left.\begin{aligned} P &= [p_{yx} = \omega_q^{h^P(y,x)}] \\ h^P(y,x) &= x \cdot y + g^P(x) \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

とする．式(13)の行列Dは

$$\left.\begin{aligned} D &= [d_{y\hat{x}} = \omega_q^{h^D(y,\hat{x})}] \\ h^D(y,\hat{x}) &= h^C(y,x_1) + h^B(x_1,x_0) \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

と書ける．ただし，$\hat{x} = x_1 N + x_0$である．
式(15)の相補系列セットは

$$\left.\begin{aligned} F^z_y &= [f^z_{y\hat{x}} = \omega_q^{h^F(z,y,\hat{x})}] \\ h^F(z,y,\hat{x}) &= h^C(y,x_1) + h^B(x_1,x_0) + h^E(z,x_0) \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

と与えられる．ただし，zは各系列サブセットを示す．
また，同様に式(16)の直交行列は

$$\left.\begin{aligned} G^y &= [g^y_{x'} = \omega_q^{h^G(y,x')}] \\ h^G(y,x') &= h^E(y,x_1) + h^D(x_0, x_2N+x_1) \\ &= h^E(y,x_1) + h^C(x_0, x_2N+x_1) \\ &\quad + h^B(x_2,x_1) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

と表せる．ただし，$\hat{x} = x_2 N^2 + x_1 N + x_0$である．これより，式(19)の$CS(N^3, N, N)$の相補系列セットは

$$\left.\begin{aligned} a^z_{yx'} &= \omega_N^{h^A(z,y,x')} \\ h^A(z,y,x') &= h^P(z,x_0) + h^G(y,x') \\ &= h^P(z,x_0) + h^E(y,x_1) \\ &\quad + h^C(x_0, x_2N+x_1) + h^B(x_2,x_1) \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

と書ける．行列Dを行列Aに変更し、式(31)を繰り返すことにより、相補系列セット$CS(N^n, N, N)$が与えられます．

4.2 論理関数の公式化

式(25)-(32)を論理関数で以下のように表現できる．

$$h^B(y_0,x_0) = yx_0 + g^B(x_0) \quad (34)$$

$$h^{\hat{B}}(\hat{x}) = h^B(x_1x_0) \quad (35)$$

$$h^C(y_0,x_0) = yx_0 + g^C(x_0) \quad (36)$$

$$\begin{aligned} h^D(y_0,\hat{x}) &= h^{\hat{B}}(\hat{x}) + h^C(y,x_1) \\ &= h^B(x_1,x_0) + h^C(y,x_1) \\ &= x_1x_0 + g^B(x_0) + yx_1 + g^C(x_1) \end{aligned} \quad (37)$$

$$h^E(y,x_0) = yx_0 + h^E(x_0) \quad (38)$$

$$\begin{aligned} h^F(z,y,\hat{x}) &= h^D(y,x_1)+h^E(z,x_0) \\ &= x_1x_0+yx_1+zx_0 \\ &\quad +g^B(x_0)+g^C(x_1)+g^E(x_0) \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} h^G(y,x') &= h^F(y,x_0,\hat{x}), \\ &= x_2x_1+x_0x_2+zx_1 \\ &\quad +g^B(x_1)+g^C(x_2)+g^E(x_1) \end{aligned} \tag{40}$$

ただし， $\hat{x}=x_1N+x_0$ と $x'=\hat{x}N+x_0$ である．したがって，式 (33) の系列長 $CS(N^2,N,N)$ の論理関数は

$$\begin{aligned} h^A(z,y,\hat{x}) &= h^G(y,x')+h^P(z,x_0) \\ &= x_2x_1+x_2x_0+zx_1+yx_1 \\ &\quad +g^B(x_1)+g^C(x_2)+g^E(x_1)+g^P(x_0) \end{aligned} \tag{41}$$

と書ける．式 (38) を繰り返すと，系列長 $CS(N^3,N,N)$ の論理関数は

$$\begin{aligned} h^A(z,y,x') &= h^G(z,x_0,x')+h^{E_2}(y,x_0) \\ &= x_3x_2+x_3x_1+x_1x_0+zx_2+yx_0 \\ &\quad +g^C(x_3)+g^E(x_2)+g^P(x_1)+g^B(x_0) \end{aligned} \tag{42}$$

と与えられる．同様に，系列長 $CS(N^4,N,N)$ は

$$\begin{aligned} h^A(z,y,x'') &= h^A(z,x_0,x')+h_3^P(y,x_0) \\ &= x_4x_3+x_4x_2+x_2x_1+zx_3+x_0x_1 \\ &\quad +y_0x_0+g^3(x_3)+g^2(x_2)+g^1(x_1)+g^0(x_0) \end{aligned} \tag{43}$$

として与えられる．これを順に繰り返すことにより，以下の定理を得る (厳密には帰納法で証明できる).

[定理 1] 相補系列セット $CS(L=N^n,K=N,M=N)$ は

$$a_{yx}^z = \omega_N^{h^A(z,y,x)}$$

と置くと，

$$\begin{aligned} h_n^A(z,y,x) &= x_{n-2}x_{n-1}+x_{n-1}x_{n-3}+ \\ &\quad +x_{n-3}x_{n-4}+x_{n-4}x_{n-5}+\cdots+x_1x_0 \\ &\quad +yx_{n-2}+zx_0+g^{n-1}(x_{n-1})+g^{n-2}(x_{n-2}) \\ &\quad +\cdots+g^1(x_1)+g^0(x_0) \end{aligned} \tag{44}$$

と表せる．ただし，

$$\left.\begin{aligned} &x=x_{n-1}N^{n-1}+x_{n-2}N^{n-2}+\cdots+x_1N+x_0 \\ &\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

である．

もし，$N=q^m$ の場合，$CS(L,K,M)$ は，式 (44) の x_k を m 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_k=(x_0^k,x_1^k,\cdots,x_m^k)$ に置き換え，また，その積をベクトルの内積とする．ただし，x_i^k は $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_{q^n-1})$ の値であり，$x_i^k \neq x_j^k (i\neq j$ または $k\neq n)$ である．

定理 1 の予想が正しいとすると，以下の論理関数より生成できる．

[系 1] 相補系列セット $CS(L=N^n,K=N,M=N)$ は

$$a_{yx'}^z = \omega_N^{h^A(z,y,x')}$$

とすると，

$$\begin{aligned} h_n^A(z,y,x) &= x_{k_{n-1}}x_{k_{n-2}}+x_{k_{n-2}}x_{k_{n-3}}+ \\ &\quad +x_{k_{n-3}}x_{k_{n-4}}+x_{k_{n-4}}x_{k_{n-5}}+\cdots+x_{k_1}x_{k_0} \\ &\quad +yx_{k_{n-1}}+zx_{k_0}+g^{k_{n-1}}(x_{k_{n-1}})+g^{k_{n-2}}(x_{k_{n-2}}) \\ &\quad +\cdots+g^{k_1}(x_{k_1})+g^{k_0}(x_{k_0}) \end{aligned} \tag{46}$$

と表せる．ただし，x_{k_i} は $\{x_0,\cdots,x_{n-1}\}$ の要素である．つまり，変数 x_k は適当な変数に置き換えられる．このようにすれば，$N=q^m$ の場合，さらに系列の数が増える．

ここで，系 1 を用いることにより，相補系列セットの論理関数を例で示す.

4.3 相補系列セットの例

定理から導出される相補系列セットの論理関数を例で示す．

例 1 Golay 系列として知られる $CS(2^4,2,2)$ の相補系列セットを論理関数によって生成する．

$$h^4(z,y,x)=x_2x_3+x_3x_1+x_1x_0+yx_2+zx_0 \tag{47}$$

ここでは簡単に $g^3(x)=0, g^2(x)=0, g^1(x)=0, g^0(x)=0$ と置くと，以下のように真理値表を与える．ただし，0 と 1 は各々1 と-1 を表す．したがって，2 相相補系列は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} A &= \{A^0,A^1\} \\ A^0 &= \begin{cases} a_0^0=(0001000100101101) \\ a_1^0=(0001111000100010) \end{cases} \\ A^1 &= \begin{cases} a_0^1=(0100010001111000) \\ a_1^1=(0100101101110111) \end{cases} \end{aligned} \tag{48}$$

このセットは十分に議論された 2 相相補系列セットを示す [1]．実際には，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の全ての要素は入れ替え可能であることが確認できる．

例 2 $CS(4^2,4,4)$ の相補系列セットを論理関数によって生成する．$g^1(x_1)=x_1/2$ または $g^0(x_0)=x_0/2$ の場合，4 相相補系列セットを示す．

$$h^2(y,z,x)=x_1x_0+yx_1+zx_0. \tag{49}$$

表 1: 式 (47) の真理値表

	$\boldsymbol{x}$				(z,y)			
x	x_3	x_2	x_1	x_0	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	1	0	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	1	0
6	0	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	1	0	0	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1	1	1	1
11	1	0	1	1	0	0	1	1
12	1	1	0	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0	0	1
14	1	1	1	0	0	1	0	1
15	1	1	1	1	1	0	0	1

式 (49) より表 2 の真理値表を得る．したがって，4 相相補系系列セットは次のように与えられる．ただし，0，1，2，3 はそれぞれ 1，j，-1，$-j$ を表す．

表 2: 式 (49) の真理値表

	$\boldsymbol{x}$			A^0 $(z=0,y)$				A^1 $(z=1,y)$			
x	x_1	x_0	x_0x_1	0	1	2	3	0	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2	0	2	0	0	0	0	0	2	2	2	2
3	0	3	0	0	0	0	0	3	3	3	3
4	1	0	0	0	1	2	3	0	1	2	3
5	1	1	1	1	2	3	0	2	3	0	1
6	1	2	2	2	3	0	1	0	1	2	3
7	1	3	3	3	0	1	2	2	3	0	1
8	2	0	0	0	2	0	2	0	2	0	2
9	2	1	2	2	0	2	0	3	1	3	1
10	2	2	0	0	2	0	2	2	0	2	0
11	2	3	2	2	0	2	0	1	3	1	3
12	3	0	0	0	3	2	1	0	3	2	1
13	3	1	3	3	2	1	0	0	3	2	1
14	3	2	2	2	1	0	3	0	3	2	1
15	3	3	1	1	0	3	2	0	3	2	1

$$
\begin{aligned}
A &= \{A^0, A^1, A^2, A^3\} \\
A^0 &= \begin{cases} a_0^0 = (0000012302020321) \\ a_1^0 = (0000123020203210) \\ a_2^0 = (0000230102022103) \\ a_3^0 = (0000301220201032) \end{cases} \\
A^1 &= \begin{cases} a_0^1 = (0123020203210000) \\ a_1^1 = (0123131321033333) \\ a_2^1 = (0123202003212222) \\ a_3^1 = (0123313121031111) \end{cases} \\
A^2 &= \begin{cases} a_0^2 = (0202032100000123) \\ a_1^2 = (0202103222223012) \\ a_2^2 = (0202210300002301) \\ a_3^2 = (0202321022221230) \end{cases} \\
A^3 &= \begin{cases} a_0^3 = (0321000001230202) \\ a_1^3 = (0321111123013131) \\ a_2^3 = (0321222201232020) \\ a_3^3 = (0321333323011313) \end{cases}
\end{aligned} \tag{50}
$$

例 3　$CS(2^4, 4, 4)$ の相補系列セットの論理関数は式 (49) と $x_0 = (x'_0, x'_1)$, $x_1 = (x'_2, x'_3)$, $z = (z'_0, z'_1)$ と $y = (y'_0, y'_1)$ と置くことにより得る．これらを (49) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
h^4(z,y,x) &= {x_0}'{x_2}' + {x_1}'{x_3}' + {y_1}'{x_3}' \\
&\quad + {y_0}'{x_2}' + {z_1}'{x_1}' + {z_0}'{x_0}'
\end{aligned} \tag{51}
$$

を得る．もし，$x = x'_0 + 2x'_1 + 4x'_2 + 8x'_3$ と置くと，

$$
\begin{aligned}
A &= \{A^0, A^1, A^2, A^3\} \\
A^0 &= \begin{cases} a_0^0 = (0000010100110110) \\ a_1^0 = (0000101011001001) \\ a_2^0 = (0000010111001001) \\ a_3^0 = (0000101011000110) \end{cases} \\
A^1 &= \begin{cases} a_0^1 = (0101000001100011) \\ a_1^1 = (0101111101101100) \\ a_2^1 = (0101000010011100) \\ a_3^1 = (0101111110010011) \end{cases} \\
A^2 &= \begin{cases} a_0^2 = (0011011000000101) \\ a_1^2 = (0011100100001010) \\ a_2^2 = (0011011011111010) \\ a_3^2 = (0011100111110101) \end{cases} \\
A^3 &= \begin{cases} a_0^3 = (0110001101010000) \\ a_1^3 = (0110110001011111) \\ a_2^3 = (0110001110101111) \\ a_3^3 = (0110110010100000) \end{cases}
\end{aligned} \tag{52}
$$

ただし，a_y^z の上付き文字と下付き文字はそれぞれ $z = z_0 + z_1 2$ と $y = y_0 + y_1 2$ を表す．ここで x'_0, x'_1 に

$\{x'_0, x'_1, x'_2, x'_3\}$ の要素を適当に割り当ててよい．例えば，$x_0 = (x'_0, x'_2), x_1 = (x'_1, x'_3)$ である．

例 4　Golay 系列として知られる $CS(2^4, 2, 2)$ の相補系列セットを論理関数によって生成する．

$$h^4(z, y, x) = x_3x_2 + x_2x_1 + x_1x_0 + yx_3 + zx_0 \tag{53}$$

$$\begin{aligned} A &= \{A^0, A^1\} \\ A^0 &= \begin{cases} a_0^0 = (0001001000011101) \\ a_1^0 = (0001001011100010) \end{cases} \\ A^1 &= \begin{cases} a_0^1 = (0100011101001000) \\ a_1^1 = (0100011110110111) \end{cases} \end{aligned} \tag{54}$$

このセットは十分に議論された 2 相相補系列セットを示す [1]．実際には，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の全ての要素は入れ替え可能であることが確認できる．

例 5　$CS(3^3, 3, 3)$ の相補系列セットを論理関数によって生成する．

$$h^3(z, y, x) = x_2x_1 + x_1x_0 + yx_2 + zx_0 \tag{55}$$

$$\begin{aligned} A &= \{A^0, A^1, A^2\} \\ A^0 &= \begin{cases} a_0^0 = (000012021000120210000201102) \\ a_1^0 = (000012021111201021222120021) \\ a_2^0 = (000012021222012102111012210) \end{cases} \\ A^1 &= \begin{cases} a_0^1 = (012021000012102222012210111) \\ a_1^1 = (012021000120210000201102000) \\ a_2^1 = (012021000201021111120021222) \end{cases} \\ A^2 &= \begin{cases} a_0^2 = (021000012021111201021222120) \\ a_1^2 = (021000012102222012210111012) \\ a_2^2 = (021000012210000120102000201) \end{cases} \end{aligned} \tag{56}$$

5　まとめ

末広の構成法を基に多相相補系列セットの論理関数を与えた．実際には, アダマール行列の行と列を入れ替えても構わないので,

$$\hat{H} = PHGQ \tag{57}$$

として表せる．ただし，P と Q は非零の要素 N からなる N 次の正則行列であり，各々の行及び列の入れ替えるようなだけではなく，その行や列にそれぞれ ω_q^k の値を乗じたものである．さらに無数の相補系列セットを得ることができるものと考えられる．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 18K04145 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] M.J.E. Golay, Complementary series, IRE Trans. Inform. Theory, vol.IT7,1961, pp.82-87.

[2] R. Turyn, “Ambiguity functions of complementary sequences,” IEEE Trans. Inform. Theory (Corresp.), vol. IT-9, pp. 46-47, Jan. 1963.

[3] G. R. Welti, “Quaternary codes for pulsed radar,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-6, pp. 400-408, June 1960.

[4] Y.Taki，H.Miyakawa，M.Hatori，and S.Namba,"Even-shift Orthogonal Sequences", IEEE Trans., IT-15, pp.295-300, 1969.

[5] S.Matsufuji, N. Suehiro, "On Functions of Even-Shift Orthogonal Sequences," Report of IEICE, SST96-63, Dec. 1996.

[6] J. A. Davis, and J. Jedwab, "Peak-to-mean power control for OFDM transmission using Golay sequences and Reed-Muller codes," Electron. Letters, vol. 33, pp. 267-268, 1997.

[7] S. Matsufuji，T. Matsumoto, "Logic Functions of Complementary Arrays," International Journal of Applied Mathematics and Informatics, Issue 1, Volume 4, pp.9-16, 2010.

[8] C.-C. Tseng，C.L. Liu，"Complementary Sets of Sequences", IEEE Trans., IT-18, pp.644-652, 1972.

[9] N.Suehiro，"Complete Complementary Code Composed of N-Multiple-Shift Orthogonal Sequences",Report of IEICE, pp.1247-1253, 1982.

[10] T.Kojima, "Complete Complementary Codes and Its Applications", Report of IEICE,vol.115,no.37,IT2015-16,pp.87-92, 2015.

[11] O. S. Rothaus, “On bent functions,” J. Combin. Theory A, vol. 20, pp. 300-305, 1976.

[12] P.V.Kumar, “On Bent Sequences and Generalized Bent Functions," Ph. D. Dissertation, University of Southern California, 1983.

[13] S. Matsufuji, and K. Imamura, "Balanced quadriphase sequences with optimal correlation properties constructed by real valued Bent functions", IEEE Trans. Information Theory, vol. 39, no. 1, pp.305–310, Jan.1993.