

ZCZ 系列と Zadoff-Chu 系列の相関特性について

On Correlation Properties of ZCZ Sequences and Zadoff-Chu Sequences

大橋 祐平[†] 黒田 翔[†] 井田 悠太[†] 松元 隆博[†] 松藤 信哉[†]

Yuhei OHASHI[†] Sho KURODA[†] Yuta IDA[†] Takahiro MATSUMOTO[†] Shinya MATSUFUJI[†]

[†] 山口大学大学院 創成科学研究科

1 まえがき

近年, 近中距離無線通信へのフーリエ変換技術を利用した OFDM の適用に伴い, 複素数値の集合系列であり, 周期自己相関関数がインパルスとなる多相直交系列セットが同期や拡散用の系列として議論されている.

特に, Zadoff-Chu 系列 [1][2] は, 周期 2^n , 系列数が 2^{n-1} の唯一の直交系列集合であることや, そのフーリエ変換した値の全ては絶対値 1 と一定の振幅であること等から着目されている [3][4].

しかし, 可能な限りハードウェア設計および取扱いが容易な 2 相, 4 相系列が望まれる. 2 相, 4 相の代表的な系列の 1 つとして, 周期 2^n , 系列数が 2^{n-1} の ZCZ 系列がある. これは, 周期自己, 相互相関関数が 0 シフトの両側の連続した区間で 0 となるような零相関領域を有する系列集合であり, 他局間干渉やマルチパスの影響のない通信ができる.

本稿では, 周期 2^n , 系列数 2^{n-1} の Zadoff-Chu 系列と同じ周期, 系列数である 2 相あるいは 4 相の ZCZ 系列とその相関特性について考察する. ZCZ 系列においては, 系列のフーリエ変換 (アダマール変換) した値の全てが 1 となり, より乱数的な性質を有する bent 型と非 bent 型の違いについても考察する. [5][6].

2 ZCZ 系列と Zadoff-Chu 系列

本節では, 周期 $N = 2^n$ となる ZCZ 系列と Zadoff-Chu 系列について述べる.

2.1 ZCZ 系列の定義

セット A は, 周期 N の M 個の系列からなり,

$$\left. \begin{aligned} A &= \{a_0, a_1, \dots, a_y, \dots, a_{M-1}\}, \\ a_y &= (a_{y,0}, a_{y,1}, \dots, a_{y,x}, \dots, a_{y,N-1}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

と表わせる. ここで, 系列 a_y の各要素は絶対値 1, すなわち $|a_{y,x}| = 1$ となる多相系列に集中する.

系列 a_y と $a_{y'}$ の非周期相関関数は,

$$C_{a_y, a_{y'}}(\tau) = \begin{cases} \sum_{x=0}^{N-1-\tau} a_{y', x}(a_{y, x+\tau})^*, & (0 \leq \tau \leq N-1) \\ \sum_{x=0}^{N-1+\tau} a_{y', x-\tau}(a_{y, x})^*, & (1-N \leq \tau < 0) \\ 0 & (|\tau| \geq N). \end{cases} \quad (2)$$

と定義される. ただし, $*$ は, 複素共役や後述する行列の複素共役転置を示す. 周期相関関数は

$$\begin{aligned} R_{a_y, a_{y'}}(\tau) &= \sum_{x=0}^{N-1} a_{y', x}(a_{y, x+\tau \bmod N})^* \\ &= C_{a_y, a_{y'}}(\tau) + C_{a_y, a_{y'}}(\tau - N) \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける.

セット A 内の系列の周期自己, 相互相関関数が

$$R_{a_y, a_{y'}}(\tau) = \begin{cases} N & \text{for } \tau = 0, \quad y = y', \\ 0 & \text{for } |\tau| = 0, \quad y \neq y', \\ 0 & \text{for } 1 \leq \tau \leq Zcz, \end{cases} \quad (4)$$

と零相関領域 Zcz を有する系列セットを ZCZ 系列と呼び [7], $A(N, M, Zcz)$ と表す.

ここで, 系列数 M の上界は,

$$M \leq \frac{N}{Zcz + 1}. \quad (5)$$

と書ける. q 相あるいはそれ以上の相からなる多相 ZCZ 符号 $A(q^{n+s}, q^{n+s-1}, q^s(q-1))$ は $s = 0$ で式 (6) の上界を満たす.

もし, 系列 a_x^m のアダマール変換の値の全てが, $|b_y^m| = 1$ を取る場合, bent と呼ばれる [5]. これは, アダマール変換してもその振幅値は一定であることを意味する.

2.2 ZCZ 系列の論理関数

ここでは, 2 相あるいは 4 相の ZCZ 系列について考える. $GF(2)$ 上の次数 n のベクトルを

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_l, \dots, x_{n-1}) \in V_2^n \quad (6)$$

と表す. ここで, 要素 x_l は整数 $x (0 \leq x < N)$ を 2 進数展開して得られる係数を表し,

$$x = x_0 2^0 + x_1 2^1 + \dots + x_{n-1} 2^{n-1} \quad (7)$$

の関係を有する. また,

$$\mathbf{x}_{n_1, n_2} = (x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}) \in V_p^{n_2-n_1+1} \quad (8)$$

を表わすものとする.

$A(2^{n+s}, 2^{n+s-1}, 2^s)$ は, $GF(2)$ 上の論理関数として

$$\left. \begin{aligned} a_x^m &= \omega_2^{f_{n+s}^m(\mathbf{x}_0, n+s-1)}, \\ f_{n+s}^m(\mathbf{x}_0, n+s-1) &= g_{n-1}^k(\mathbf{x}_s, n+s-2) + \mathbf{x}_0, s \cdot \mathbf{x}_{j_0, j_s} \\ &\quad + \mathbf{m}_0, n-2 \cdot \mathbf{x}_{l_0, l_{n-2}} + \gamma x_{n+s-1} \\ g^k(\mathbf{x}_s, n+s-2) &= x_{k_1} x_{k_2} + x_{k_2} x_{k_3} + x_{k_{n-3}} x_{k_{n-2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

と与えられる [7].

ただし, $\omega_2 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2}} = e^{\pi\sqrt{-1}}$, m は $m_{0, n-2}$ に相当し, $\gamma, \gamma' \in GF(2)$, $g_{n-1}(\cdot)$ は, V_q^{n-1} から R_q への写像であり, これは, 対角行列 G_{n-1} を意味する.

また, $x_{j_s} = x_{n+s-1}$, $x_{l_0} = x_0$, $x_{j_0, j_{s-1}}, x_{l_1, l_{n-2}}, (x_l \neq x_{j_l})$ は, $\{x_1, \dots, x_{n+s-2}\}$ に含まれる異なる要素である. ここで, $g^k(x)$ は, V_2^n から $GF(2)$ あるいは実数値への論理関数を示す.

$x_{k_m} \neq x_{k_l} (k \neq l)$ は, $x_{s, n+s-2}$ の要素である. 具体的な論理関数の例は 3.2 章で述べる.

2.3 Zadoff-Chu 系列

本節では, $N = 2^n$ 次フーリエ変換行列により表される N 相あるいはそれ以上の相からなる周期 $N = 2^n, M = \frac{N}{2}$ 多相系列である Zadoff-Chu 系列について述べる.

ただし, $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{2^n-2}\}$, $a_y = (a_{y,0}, a_{y,1}, \dots, a_{y,N-1})$ であり,

$$\left. \begin{aligned} a_y, x &= \omega_N^{f(y, x)} \\ f(y, x) &= xy + k\frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と表せる. 定数 k は N と互いに素 $(k, N) = 1$ である. これは, $N = 2^n$ において, $M = \frac{N}{2}$ の部分系列セットが存在することに注意しよう.

N 次フーリエ変換の値 b_y^k は全て絶対値 1 の値を持つ. このような発生関数は, フーリエ変換上で bent 関数となる [5].

3 系列セットの相関特性の検討

非周期自己・相互相関を評価するメリットファクターを述べ, 直交符号である系列セットの相関について考察する.

3.1 メリットファクター

よく知られたメリットファクターは

$$\begin{aligned} F_{aa} &= \frac{|C_{a_y, a_y}(0)|^2}{\sum_{\tau=1}^{N-1} \{|C_{a_y, a_y}(\tau)|^2 + |C_{a_y, a_y}(-\tau)|^2\}} \\ &= \frac{N^2}{2 \sum_{\tau=1}^{N-1} |C_{a_y, a_y}(\tau)|^2} \end{aligned} \quad (11)$$

と定義される. ただし, $|C_{a_y, a_y}(0)| = N$ である. 式 (12) からみて分かるように, F_{aa} が大きいほど鋭い自己相関関数となる. また, 非周期相互相関関数を, 上記のメリットファクターに合わせて,

$$F_{ac} = \frac{N^2}{\sum_{\tau=1}^{N-1} \{|C_{a_y, a_{y'}}(\tau)|^2 + |C_{a_y, a_{y'}}(-\tau)|^2\}} \quad (12)$$

として評価することにする. ($y \neq y'$)

上記で述べた周期 N の多相系列セットにおいては, 適当な部分系列セット k のメリットファクターは, 以下の表の通り, 計算できる. ただし, 部分系列セットのうち, 特徴のあるメリットファクターを選択して記入して, 全体の傾向を説明することにする.

3.2 系列セットの相関特性の検討

Zadoff-Chu 系列における部分系列セット A のメリットファクターを表 1 に示す. 表 1 は, たとえば周期 $N = 32$ の Zadoff-Chu 系列において, メリットファクターの F_{aa} が一番高い値が $k = 1, 31$, 低い値が $k = 5, 27$, F_{ac} が一番高い値が $k = 15, 17$ を示している.

表 1: Zadoff-Chu 系列のメリットファクター

N=32	k=1, 31		k=5, 27		k=15, 17	
	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}
max	9.18	1.04	1.78	1.44	2.04	1.64
min	9.18	0.94	1.78	0.67	2.04	0.69
ave	9.18	1.00	1.78	1.08	2.04	1.10

N=64	k=1, 63		k=23, 41		k=31, 33	
	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}
max	12.77	1.03	1.83	1.44	2.01	1.72
min	12.77	0.95	1.83	0.65	2.01	0.68
ave	12.77	1.00	1.83	1.06	2.01	1.10

2 相 (または 4 相) ZCZ 系列 ($Z_{cz}=1$) における部分系列セット A のメリットファクターを表 2 に示す.

A1~A6 は式 (10) より与えた論理関数の式を用いている.

$$A1: x_0x_4 + \frac{1}{2}x_2$$

$$A2: x_0x_4 + x_2x_3 + x_0x_2 + \frac{1}{2}x_1$$

$$A3: x_0x_4 + x_1x_2 + x_0x_1 + \frac{1}{2}x_3$$

$$A4: x_0x_5 + x_1x_4$$

$$A5: x_0x_5 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_5 + x_1x_2$$

$$A6: x_0x_5 + x_1x_4 + x_2x_3$$

ここで, A1, A4 は非 bent 型の ZCZ 系列, A2, A5 は F_{aa} が高い値の bent 型の ZCZ 系列, A3, A6 は F_{aa} が低い値の bent 型の ZCZ 系列におけるメリットファクターを示している. また, $N = 2^n$ において, n が奇数の場合は 4 相の場合しか bent 型は存在しない.

同様に 2 相 (または 4 相) ZCZ 系列 ($Z_{cz}=2$) における部分系列セット A のメリットファクターを表 3 に示す.

A7~A12 は式 (10) より与えた論理関数の式を用いている.

$$A7: x_0x_2 + x_1x_4 + \frac{1}{2}x_1$$

$$A8: x_0x_2 + x_1x_4 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

$$A9: x_0x_2 + x_1x_4 + x_0x_1 + \frac{1}{2}x_3$$

$$A10: x_0x_4 + x_1x_5$$

$$A11: x_0x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_2$$

$$A12: x_0x_4 + x_1x_5 + x_2x_3$$

表 2: ZCZ 系列 ($Z_{cz}=1$) のメリットファクター

N=32	A1		A2		A3	
	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}
max	0.54	10.06	1.18	2.90	1.03	2.90
min	0.20	0.26	0.91	0.52	1.03	0.56
ave	0.35	3.12	1.04	1.47	1.03	1.44
N=64	A4		A5		A6	
	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}
max	0.68	7.11	3.36	1.56	1.36	2.37
min	0.23	0.19	2.78	0.73	0.85	0.46
ave	0.45	2.41	3.07	1.03	1.08	1.24

ここで, A7, A10 は非 bent 型の ZCZ 系列, A8, A11 は F_{aa} が高い値の bent 型の ZCZ 系列, A9, A12 は F_{aa} が低い値の bent 型の ZCZ 系列におけるメリットファクターを示している. また, $N = 2^n$ において, n が奇数の場合は 4 相の場合しか bent 型は存在しない.

表 3: ZCZ 系列 ($Z_{cz}=2$) のメリットファクター

N=32	A7		A8		A9	
	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}
max	0.96	3.55	1.03	2.90	1.03	2.46
min	0.60	0.58	1.03	0.62	1.03	0.71
ave	0.78	1.68	1.03	1.53	1.03	1.49
N=64	A10		A11		A12	
	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}	F_{aa}	F_{ac}
max	0.63	1.93	3.04	1.48	1.25	2.37
min	0.39	0.28	3.04	0.85	0.90	0.47
ave	0.51	1.01	3.04	1.04	1.07	1.26

Zadoff-Chu 系列は, $N=64$ において, F_{aa} の値が 12.77 と bent 型の ZCZ の F_{aa} の値が優れているものに比べても 4 倍近くある場合が存在する一方で, F_{aa} の値が 1.83 と小さい値となる場合も存在し, バラツキがある. $N=32$ でも同様である.

非 bent 型の ZCZ 系列は, F_{ac} の値は大きくなるが, バラツキが非常に目立ち, 自己相関特性も F_{aa} が 0 点台であり, 他の系列に比べて優れているとはいえない.

bent 型の ZCZ 系列は, F_{ac} において Zadoff-Chu 系列よりもメリットファクターの値が最大で 0.5 近く大きくなるのが分かる. また, ZCZ 区間を広げて系列数を減らせば, F_{ac} の値が 0.5 近く大きくなっており, さらに相互相関関数を低く抑えることができることもわかる.

3.3 相関関数の評価の検討

また, $N=64$ において Zadoff-Chu 系列と bent 型 ZCZ 系列において, F_{aa} が高い値を持つ部分系列セット A において, 平均化した非周期・周期の自己・相互相関関数を図 1-3 に示す.

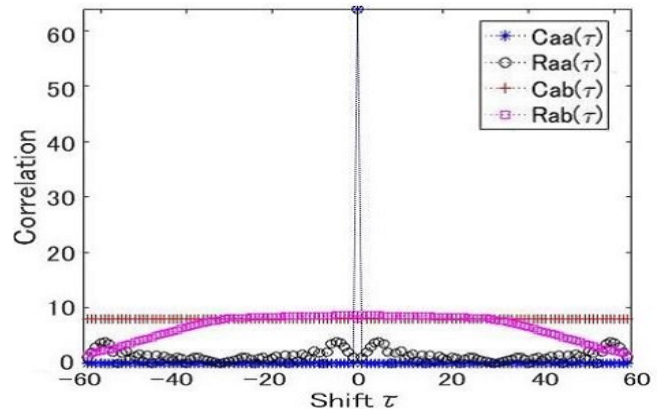


図 1: Zadoff-Chu 系列 ($k=1, 63$) の平均の相関関数

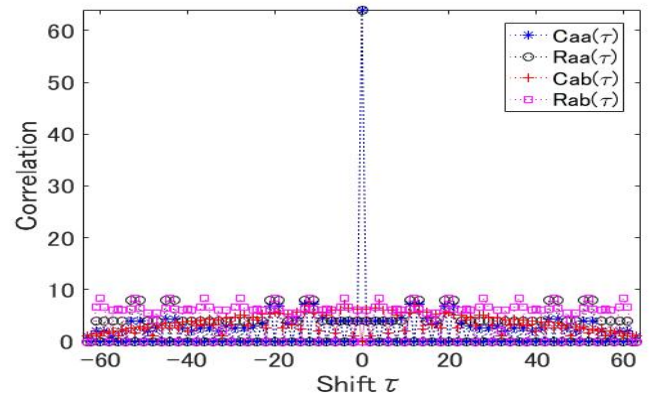


図 2: 2 相 bent 型 ZCZ 系列 (A5) 平均の相関関数

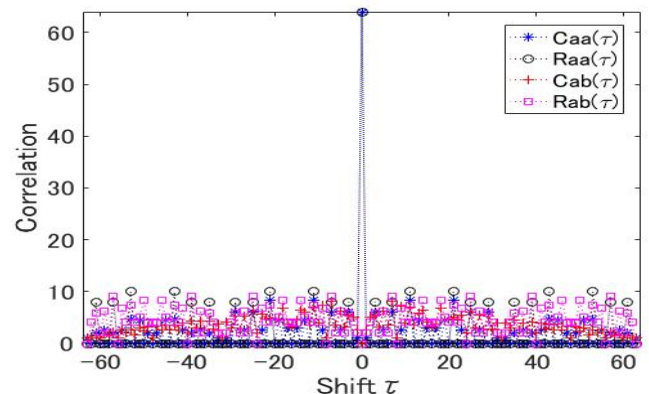


図 3: 2 相 bent 型 ZCZ 系列 (A11) の平均の相関関数

同様に、 $N=64$ において Zadoff-Chu 系列と bent 型 ZCZ 系列において、 F_{aa} が低い値を持つ部分系列セット A において、平均化した非周期・周期の自己・相互相関関数を図 4-6 に示す。

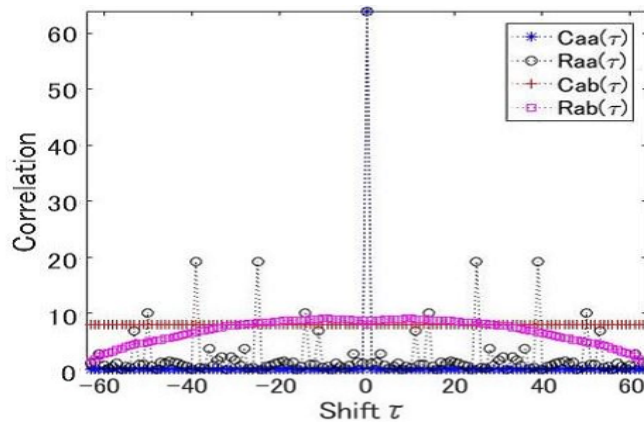


図 4: Zadoff-Chu 系列 ($k=23, 41$) の平均の相関関数

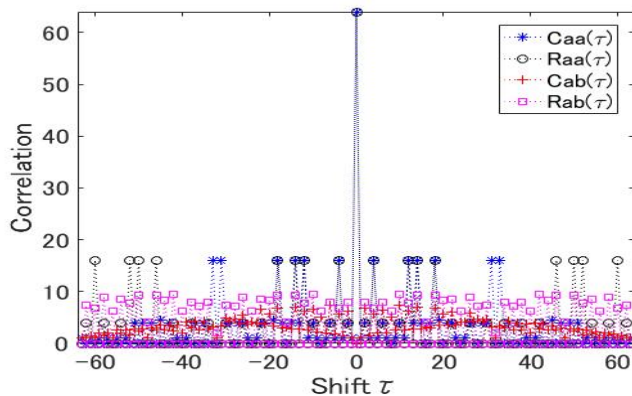


図 5: 2 相 bent 型 ZCZ 系列 (A6) 平均の相関関数

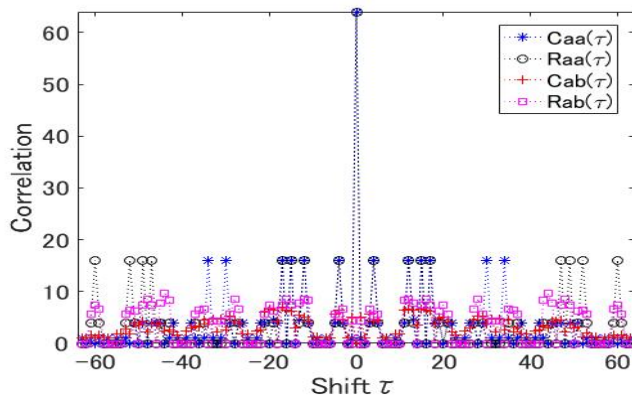


図 6: 2 相 bent 型 ZCZ 系列 (A12) の平均の相関関数

Zadoff-Chu 系列は、周期自己相関においてインパルスな特性を有するが、周期相互相関関数は大きな値となる。図 1 に示すように、非周期自己相関関数において大きなピーク値が現れる箇所がない場合や、図 4 に示すように、パラメータ k の選択によっては大きなピーク値が現れる箇所が存在するような好ましい結果にならない場合がある。

bent 型の ZCZ 系列は、相互相関関数が Zadoff-Chu 系列よりも低く抑えられることが図 2, 図 3, 図 5, 図 6 から読み取れる。これは、自己相関が高ければ相互相関は低くなるという Salwate の下界 [8] の関係が成り立っているといえる。周期自己相関関数においては、論理関数によっては図 5, 図 6 のように大きなピーク値が現れる箇所が存在する。

4 あとがき

周期 $N = 2^n$ の bent 型を含む ZCZ 系列、あるいは Zadoff-Chu 系列の相関特性について検討した。

Zadoff-Chu 系列は、非周期自己相関関数においてバラツキがあり、非常に低い相関とそうでないものがはっきりしている。

一方で、bent 型 ZCZ 系列は、Zadoff-Chu 系列に比べてほぼ同じ低い相関特性を有する。また、周期自己相関関数においては、シフト量 0 付近で値が 0 に近くなるため同期ずれを防ぐために有効であるといえる。

これらのことから、Zadoff-Chu 系列のような多相系列と比べても bent 型 ZCZ 系列は適用において十分有効ではないかといえる。

参考文献

- [1] D.C.Chu, "Polyphase Codes With Good Periodic Correlation Properties, " IEEE Trans. Information Theory, vol. 18, pp.531-532, July 1972.
- [2] P.Z.Fan, M.Darnell, "Sequence Design for Communications Applications Sequence Design for Communications Applications[M]. London : Research Studies Press, 1996.
- [3] M.M.U.Gui, X.Ma, S. Lee, "Timing and Frequency Synchronization for OFDM Downlink Transmissions Using Zadoff-Chu Sequences, " IEEE Trans. Wireless Communications, Vol.14, pp.1716-1729, March 2015.
- [4] 佐和橋衛, 山田大貴, 志村 彩, 岸山祥久, "フルデュープレクスにおける時間同期した巡回シフト Zadoff-Chu 系列を用いる制御チャンネル多重法, "信学技報, RCS2018-150, pp.1-6, Oct. 2018.
- [5] 松藤, 今村, " bent 関数と周期相関の低い系列 ", 情報理論とその応用, 暗号とセキュリティジョ

- イントワークショップ講演論文集, WITA'90-C2,
pp.163-171, Aug. 1990.
- [6] O. S. Rothaus, "On bent functions", J. Combin.
Theory (A), vol. 20, pp. 300-305, May 1976.
- [7] S. Matsufuji, T. Hayashi, Y. Ida, and T.
Matsumoto, "On bent ZCZ codes", Proc. of
IWSDA'15, pp. 216-219, Sept. 2015.
- [8] D. V. Sarwate, "Bounds on Crosscorrelation and
Autocorrelation of Sequences", IEEE Trans. In-
formation Theory IT-25(6), pp.720 - 724, Dec.
1979.