自然災害を考慮した社会インフラの最適保全モデル

Optimal Maintenance Models of Infrastractures

Condsidering Natural Disasters

岸田 巧 † 伊藤 弘道 † 樋口 良之 ††
Takumi Kishida † Kodo Ito † Yoshiyuki Higuchi ††
† 鳥取大学 工学部 †† 福島大学 理工学群

1 概要

本研究では、劣化レベルにより変動する費用と自然 災害を考慮した累積損傷モデルを定式化し、最適保全 方策を解析的に議論する。総期待コスト率を導出し、 それを最小にする最適予防保全レベルを数値計算によ り求める。

2 はじめに

道路や橋梁などの社会インフラは我々の生活や経済活動の基盤である。地方自治体は経済の低迷や人口減少,少子高齢化,技術者の不足など多くの制約の下で,道路の保全を実施しなければならない。したがって,保全にかかるコストをできるだけ抑えるために効率的な保全を行う必要がある。

インフラ施設は時間とともに確率的に劣化し,道路の劣化予測手法や最適保全方策についての研究が多く存在する.伊藤らは累積損傷モデルを用いて海岸保全施設の最適保全方策を解析的に示した[1].また,伊藤らはインフラストラクチャの最適保全方策をマルコフ連鎖を用いて検討した[2].

多くの研究では保全費用が一定と仮定されているが、 実際には劣化レベルに応じて変化する.本研究では、 保全費用が劣化レベルに応じて変化するものとして、 累積損傷モデルを用いて社会インフラの最適保全方策 を議論する.総期待コスト率を導出し、それを最小に する最適予防保全レベルを検討する.また、このモデルを基に自然災害の発生とその復旧を考慮した拡張モ デルを提案する.

3 多段階コストモデル(モデル1)

まず,以下の3つの条件の下での最適保全モデルについて議論する.

- 1) 道路のような社会インフラは時間とともに劣化し、その損傷量は時刻 $jT(T>0, j=1,2,\cdots)$ において測定される. 各損傷量 W_j は同一の分布 $G(x) \equiv \Pr\{W_j \leq x\}$ をもつ [3].
- 2) 劣化の状態は個別の劣化レベル $Z_i(i=1,2,\cdots,K-1,K)$ として記述される。時刻 jT で累積損傷量が Z_K を超えたとき,事後保全(CM)が時刻 jT で行われる。時刻 jT で累積損傷量が $Z_1(< Z_K)$ と Z_K の間のとき,予防保全(PM)が時刻 jT で行われる。

3) 事後保全の費用を c_K , 累積損傷量が Z_i と Z_{i+1} $(i=1,2,\cdots,K-1)$ の間のときの予防保全の費用を c_i $(< c_{i+1})$ とする.

時刻 (j+1)T で事後保全が行われる確率は

$$P_K = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{Z_1} \overline{G}(Z_K - x) dG^{(j)}(x), \quad (1)$$

となる. 時刻 (j+1)T で予防保全が行われる確率は

$$P_{i} = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{0}^{Z_{1}} \left[G(Z_{i+1} - x) - G(Z_{i} - x) \right] dG^{(j)}(x),$$

$$(i = 1, 2, \dots, K - 1)$$
(2)

となる. $\phi^{(j)}(x)$ $(j=1,2,\cdots)$ は関数 $\phi(x)$ の j 重スティルチェスたたみこみを表し, $\phi^{(0)}(x)\equiv 1$ とする. 保全までの平均時間は

$$T[1 + M_G(Z_1)],$$
 (3)

となる. ここで $M_G(x) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} G^{(j)}(x)$ とし、保全までの総期待コストは

$$c_K - \sum_{i=1}^{K-1} (c_K - c_i) \{ G(Z_{i+1}) - G(Z_i)$$

$$+ \int_0^{Z_1} [G(Z_{i+1} - x) - G(Z_i - x)] dM_G(x) \}, (4)$$

と表される. したがって, 総期待コスト率は式 (3), (4) より [3, p59],

$$TC_{1}(Z_{1})$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} c_{K} - \sum_{i=1}^{K-1} (c_{K} - c_{i}) \{G(Z_{i+1}) - G(Z_{i}) \\ + \int_{0}^{Z_{1}} [G(Z_{i+1} - x) - G(Z_{i} - x)] dM_{G}(x) \} \end{bmatrix}}{1 + M_{G}(Z_{1})},$$
(5)

となる. 劣化レベルが Z_1 より大きいとき予防保全が行われるので, $TC_1(Z_1)$ は Z_1 の関数で表現される. $C_1(Z_1)$ を Z_1 について微分し, ゼロとおくと

$$\sum_{i=2}^{K} (c_i - c_{i-1}) \int_{Z_i - Z_1}^{Z_i} [1 + M_G(Z_i - x)] dG(x)$$

$$= c_1, \qquad (6)$$

となり、式(6)の左辺を $Q_1(Z_1)$ とすると

$$Q_1(0) = 0,$$

$$Q_1(Z_2) = (c_2 - c_1)M_G(Z_2) + \sum_{i=3}^{K} (c_i - c_{i-1})$$

$$\times \int_{Z_i - Z_2}^{Z_i} [1 + M_G(Z_i - x) dG(x)].$$

を得る. したがって, $M_G(Z_2) > c_1/(c_2-c_1)$ のとき,式(6)を満たす有限で唯一の解 Z_1^* (0 $< Z_1^* < Z_2$) が存在する.

4 多段階コスト拡張モデル(モデル 2)

モデル 1 の仮定 1), 2) と 3)を書き換えた以下の仮定 3')の下での最適保全モデルを考える.

3') 事後保全の費用を $c_K + c_0(Z_K)$ とし, 累積損傷量が Z_i と Z_{i+1} $(i=1,2,\cdots,K-1)$ の間のとき予防保全の費用を $c_i+c_0(x)$ とする. ここで $c_0(x)$ は追加の交換費用であり, 累積損傷量 x によって変化する.また, $c_0(0)=0$ とする.

保全までの総期待コストは

$$c_{K} - \sum_{i=1}^{K-1} (c_{K} - c_{i}) \left\{ G(Z_{i+1}) - G(Z_{i}) + \int_{0}^{Z_{1}} \left[G(Z_{i+1} - x) - G(Z_{i} - x) \right] dM_{G}(x) \right\} + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{0}^{Z_{1}} \left[\int_{x}^{Z_{K}} \overline{G}(y - x) dc_{0}(y) \right] dG^{(j)}(x), \quad (7)$$

となる. したがって、総期待コスト率は、式(3)、(7)より [3、p48]、

$$TC_{2}(Z_{1})$$

$$= \begin{bmatrix} c_{K} - \sum_{i=1}^{K-1} (c_{K} - c_{i}) \{G(Z_{i+1}) - G(Z_{i}) \\ + \int_{0}^{Z_{1}} [G(Z_{i+1} - x) - G(Z_{i} - x)] dM_{G}(x) \} \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{0}^{Z_{1}} \left[\int_{x}^{Z_{K}} \overline{G}(y - x) dc_{0}(y) \right] dG^{(j)}(x) \end{bmatrix},$$

$$= \frac{\left[c_{K} - \sum_{i=1}^{K-1} (c_{K} - c_{i}) \{G(Z_{i+1}) - G(Z_{i}) \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{0}^{Z_{1}} \left[\int_{x}^{Z_{K}} \overline{G}(y - x) dc_{0}(y) \right] dG^{(j)}(x) \right]}{1 + M_{G}(Z_{1})},$$
(8)

となる. $G(x) = 1 - \exp(-\mu x)$, $c_0(x) = c_0 x$ とするとき,式(8) を書き換えると

$$TC_{2}(Z_{1}) = \frac{\begin{bmatrix} c_{K} - \sum_{i=2}^{K} (c_{i} - c_{i-1}) \\ \times \left[1 - e^{-\mu(Z_{i} - Z_{1})} \right] \\ -\frac{c_{0}}{\mu} e^{-\mu(Z_{K} - Z_{1})} \end{bmatrix} + \frac{c_{0}}{\mu}, \quad (9)$$

と表される. 式 (9) の $C_2(Z_1)$ を Z_1 について微分し, ゼロとおくと

$$\mu Z_1 \sum_{i=2}^{K} (c_i - c_{i-1}) e^{-\mu(Z_i - Z_1)}$$
$$-c_0 Z_1 e^{-\mu(Z_K - Z_1)} = c_1.$$
 (10)

となる. 式(10)の左辺を $Q_2(Z_1)$,とおくと

$$\begin{split} Q_2(0) &= 0\,, \\ Q_2(Z_2) &= \mu Z_2(c_2-c_1) + \mu Z_2 \mathrm{e}^{\mu Z_2} \\ &\times \left[\sum_{i=3}^K (c_i-c_{i-1}) \mathrm{e}^{-\mu Z_i} - \frac{c_0}{\mu} \mathrm{e}^{-\mu Z_K} \right], \end{split}$$

となる. したがって, $Q_2(Z_2)>c_1$ のとき,式 (10) を満たす有限で唯一の Z_1^* $(0< Z_1^*< Z_2)$ が存在する. K=2 のとき, $Q_2(Z_2)>c_1$ は次式のように書き換えられる.

$$\mu Z_2 > \frac{c_1}{c_2 - c_1 - c_0/\mu}.$$
 (11)

5 自然災害を考慮した拡張モデル

5.1 多段階コストモデル (モデル3)

モデル1の仮定1)-3)に加え,以下の4)の下での最適保全方策を考える.

4) システムは通常の劣化とは独立に発生する自然災害によって損傷し、災害復旧 (DR) が行われる。自然災害の発生時間は分布 F(t) にしたがい、その平均災害復旧費用を $c_D(>c_K)$ とする。

時刻 (i+1)T で事後保全が行われる確率は

$$\sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T) \int_0^{Z_1} \overline{G}(Z_K - x) dG^{(j)}(x), \qquad (12)$$

時刻 (j+1)T で予防保全が行われる確率は

$$\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T)$$

$$\times \int_{0}^{Z_{1}} \left[G(Z_{i+1} - x) - G(Z_{i} - x) \right] dG^{(j)}(x),$$
(13)

時刻 (j+1)T で災害復旧が行われる確率は

$$\sum_{j=0}^{\infty} F((j+1)T) \int_{0}^{Z_1} \overline{G}(Z_1 - x) dG^{(j)}(x), \qquad (14)$$

となる. 保全までの平均時間は

$$\sum_{j=0}^{\infty} G^{(j)}(Z_1) \int_{jT}^{(j+1)T} \overline{F}(t) dt, \qquad (15)$$

で表される. また, 保全までの総期待コストは

$$c_{K} - \sum_{i=1}^{K-1} (c_{K} - c_{i}) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T)$$

$$\times \int_{0}^{Z_{1}} [G(Z_{i+1} - x) - G(Z_{i} - x)] dG^{(j)}(x)$$

$$+ (c_{D} - c_{K}) \sum_{j=0}^{\infty} F((j+1)T)$$

$$\times [G^{(j)}(Z_{1}) - G^{(j+1)}(Z_{1})], \qquad (16)$$

となる. したがって、総期待コスト率は、式 (15), (16) より

$$C_{3}(Z_{1})$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} c_{K} + (c_{D} - c_{K}) \sum_{j=0}^{\infty} F((j+1)T) \\ \times [G^{(j)}(Z_{1}) - G^{(j+1)}(Z_{1})] \\ - \sum_{i=1}^{K-1} (c_{K} - c_{i}) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T) \\ \times \int_{0}^{Z_{1}} [G(Z_{i+1} - x) - G(Z_{i} - x)] dG^{(j)}(x) \end{bmatrix}}{\sum_{j=0}^{\infty} G^{(j)}(Z_{1}) \int_{jT}^{(j+1)T} \overline{F}(t) dt},$$

$$(17)$$

となる. $F(t)=1-\exp(-\lambda t)$, $G(x)=1-\exp(-\mu x)$ とすると、式 (17) は

$$C_{3}(Z_{1})$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} c_{K} - \alpha e^{-(1-\alpha)\mu Z_{1}} \\ \times \sum_{i=2}^{K} (c_{i} - c_{i-1}) \left[1 - e^{-\mu(Z_{i} - Z_{1})} \right] \end{bmatrix}}{\left[1 - \alpha e^{-(1-\alpha)\mu Z_{1}} \right] / \lambda}$$

$$+ (c_{D} - c_{K})\lambda,$$
(18)

と表される. ここで $\alpha \equiv \exp(-\lambda T)$ とする. $C_3(Z_1)$ を Z_1 について微分し, ゼロとおくと

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \left[1 - e^{-(1-\alpha)\mu Z_1} \right] \sum_{i=2}^{K} (c_i - c_{i-1}) e^{-\mu(Z_i - Z_1)}$$

$$= c_1, \tag{19}$$

となる. 式 (19) の左辺を $Q_3(Z_1)$ とおくと

$$Q_3(0) = 0,$$

$$Q_3(Z_2) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[1 - e^{-(1-\alpha)\mu Z_2} \right]$$

$$\times \left[c_2 - c_1 - \sum_{i=3}^K (c_i - c_{i-1}) e^{-\mu(Z_i - Z_1)} \right],$$

となる. したがって、 $Q_3(Z_2) > 0$ のとき、式 (19) を満たす有限で唯一の Z_1^* (0 < Z_1^* < Z_2) が存在する.

5.2 多段階コスト拡張モデル (モデル 4)

モデル 1 の仮定 1), 2) とモデル 2 の仮定 3'), モデル 3 の 4) の下での最適保全方策を考える. 保全までの平均時間は式 (15) となり、保全までの総期待コストは

$$c_{K} - \sum_{i=1}^{K-1} (c_{K} - c_{i}) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T)$$

$$\times \int_{0}^{Z_{1}} [G(Z_{i+1} - x) - G(Z_{i} - x)] dG^{(j)}(x)$$

$$+ (c_{D} - c_{K}) \sum_{j=0}^{\infty} F((j+1)T)$$

$$\times \left[G^{(j)}(Z_{1}) - G^{(j+1)}(Z_{1}) \right]$$

$$+ c_{0}(Z_{1}) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T)$$

$$\times \left[G^{(j)}(Z_1) - G^{(j+1)}(Z_1) \right] \sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T)$$

$$\times \int_0^{Z_1} \left\{ \int_{Z_1}^{Z_K} \overline{G}(y-x) dc_0(y) \right\} dG^{(j)}(x). (20)$$

したがって、総期待コスト率は、式 (15)、(20) より、以下となる.

$$TC_{4}(Z_{1})$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} c_{K} + (c_{D} - c_{K}) \sum_{j=0}^{\infty} F((j+1)T) \\ \times \left[G^{(j)}(Z_{1}) - G^{(j+1)}(Z_{1}) \right] \\ - \sum_{i=1}^{K-1} (c_{K} - c_{i}) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T) \\ \times \int_{0}^{Z_{1}} \left[G(Z_{i+1} - x) - G(Z_{i} - x) \right] dG^{(j)}(x) \\ + c_{0}(Z_{1}) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T) \\ \times \left[G^{(j)}(Z_{1}) - G^{(j+1)}(Z_{1}) \right] \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \overline{F}((j+1)T) \\ \times \int_{0}^{Z_{1}} \left\{ \int_{Z_{1}}^{Z_{K}} \overline{G}(y - x) dc_{0}(y) \right\} dG^{(j)}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} G^{(j)}(Z_{1}) \int_{jT}^{(j+1)T} \overline{F}(t) dt}{\sum_{j=0}^{\infty} G^{(j)}(Z_{1}) \int_{jT}^{(j+1)T} \overline{F}(t) dt}.$$

 $\overline{F}(t)=1$ のとき,式 (21) は式 (8) と一致する. $F(t)=1-\exp(-\lambda t)$, $G(x)=1-\exp(-\mu x)$, $c_0(x)=c_0x$,とすると,式 (21) は以下となる.

$$C_{4}(Z_{1})$$

$$= \begin{bmatrix} c_{K} - \alpha e^{-(1-\alpha)\mu Z_{1}} \sum_{i=2}^{K} (c_{i} - c_{i-1}) \\ \times \left[1 - e^{-\mu(Z_{i} - Z_{1})}\right] \\ + c_{0}\alpha e^{-(1-\alpha)\mu Z_{1}} \left[1 - e^{-\mu(Z_{K} - Z_{1})}\right] / \mu \\ + c_{0}Z_{1}\alpha e^{-(1-\alpha)\mu Z_{1}} \\ - \left[1 - \alpha e^{-(1-\alpha)\mu Z_{1}}\right] / \lambda \\ + (c_{D} - c_{K})\lambda.$$
(22)

 $C_4(Z_1)$ を Z_1 について微分し、ゼロとおくと

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\sum_{i=2}^{K} (c_i - c_{i-1}) e^{-\mu(Z_i - Z_1)} - \frac{c_0}{\mu} e^{-\mu(Z_K - Z_1)} \right]
\times \left[1 - e^{-(1-\alpha)\mu Z_1} \right] + \frac{c_0}{\mu} \left[\frac{1 - \alpha e^{-(1-\alpha)\mu Z_1}}{1 - \alpha} - \mu Z_1 \right]
= c_1 + \frac{c_0}{\mu}.$$
(23)

 $c_0 = 0$ のとき,式 (23) は式 (19) と一致する.

6 数值例

T=1, $Z_K=5$, $c_i=ai$, $Z_i=i$, a=1 とする. 表 1 は, モデル 1 において最適予防保全レベル Z_1^* と そのときの $TC_1(Z_1^*)$ を示す. c_K が増加するとき, Z_1^* は減少し, $TC_1(Z_1^*)$ は増加する. 一方で, μ が増加すると, Z_1^* は増加し $TC_1(Z_1^*)$ は減少する.

表 1: モデル 1 において各パラメータを変化させたと きの感度分析の結果.

c_K	μ	Z_1^*	$TC_1(Z_1^*)$
25	1	1.444	1.385
30	1	1.387	1.442
35	1	1.335	1.498
25	1.5	1.602	0.832
25	2	1.657	0.604

表 2 は,モデル 2 において,T=1, $Z_K=5$, $c_i=ai$, $Z_i=i$, a=1 としたときの Z_1^* と $TC_2(Z_1^*)$ を示している. c_0 が増加すると, Z_1^* , $TC_2(Z_1^*)$ はともに増加する.また c_K , μ が変化したとき, Z_1^* , $TC_2(Z_1^*)$ は表 1 と同じ傾向が見られる.

表 2: モデル 2 において各パラメータを変化させたと きの感度分析の結果.

c_K	c_0	μ	Z_1^*	$TC_2(Z_1^*)$
25	1	1	1.457	2.373
30	1	1	1.398	2.431
35	1	1	1.345	2.487
25	2	1	1.469	3.361
25	3	1	1.482	4.349
25	1	1.5	1.622	1.489
25	1	2	1.661	1.102

表 3 は、モデル 3 において、T=1、 $Z_K=5$ 、 $c_i=ai$ 、 $Z_i=i$, a=1, $c_D=100$ としたときの Z_1^* とそのときの $TC_3(Z_1^*)$ を示している。 λ が減少したとき、 Z_1^* 、 $TC_3(Z_1^*)$ はともに減少する。 c_K 、 μ が変化したとき、 Z_1^* 、 $TC_3(Z_1^*)$ は表 1、2 と同じ傾向が見られる。

表 3: モデル 3 において各パラメータを変化させたと きの感度分析の結果.

12524 N. 1 4 H. 1				
c_K	μ	λ	Z_1^*	$TC_3(Z_1^*)$
25	1	1/10	1.548	11.260
30	1	1/10	1.487	11.316
35	1	1/10	1.433	11.369
25	1.5	1/10	1.725	10.716
25	2	1/10	1.762	10.502
25	1	1/50	1.465	3.359
25	1	1/100	1.455	2.372

表 4 は, モデル 4 において, T = 1, $Z_K = 5$, $c_i = ai$,

 $Z_i=i,\ a=1,\ c_D=100$ としたときの Z_1^* とそのときの $TC_4(Z_1^*)$ を示す. $c_K,\ c_0,\ \mu,\ \lambda$ が変化したとき、 $Z_1^*,\ TC_4(Z_1^*)$ は表 $1,\ 2,\ 3$ と同様の傾向がある.

表 4: モデル 4 において各パラメータを変化させたと きの感度分析の結果.

c_K	c_0	μ	λ	Z_1^*	$TC_4(Z_1^*)$
25	1	1	1/10	1.640	12.155
30	1	1	1/10	1.572	12.213
35	1	1	1/10	1.512	12.270
25	2	1	1/10	1.796	13.110
25	3	1	1/10	1.861	14.056
25	1	1.5	1/10	1.812	11.292
25	1	2	1/10	1.843	10.915
25	1	1	1/50	1.492	4.329
25	1	1	1/100	1.475	3.351

モデル 2, 4 は費用の変動を考慮しているため, $TC_2(Z_1^*)$, $TC_4(Z_1^*)$ はそれぞれ, $TC_1(Z_1^*)$, $TC_3(Z_1^*)$ より大きい。モデル 3, 4 は自然災害からの復旧費用を考慮しているため, $TC_3(Z_1^*)$, $TC_4(Z_1^*)$ はそれぞれ, $TC_1(Z_1^*)$, $TC_2(Z_1^*)$ より大きい。モデル 2, 4 の Z_1^* はそれぞれモデル 1, 3 の Z_1^* より大きく,モデル 3, 4 の Z_1^* はそれぞれモデル 1, 2 の Z_1^* より大きい.各パラメータがモデルに与える影響の大きさはほとんど変わらない。また,これらの数値計算の結果より本モデルの振る舞いは妥当であると考えられ,本モデルを用いることで,より効率的な保全が実施できる.

7 まとめ

本研究では、社会インフラの最適保全モデルを議論した。モデル 1 は多段階の劣化レベル、モデル 2 では劣化レベルに応じて変化する費用を考慮した。モデル 3、4 はモデル 1、2 を自然災害からの復旧を考慮して拡張した。総期待コスト率を導出し、それを最小にする最適予防保全レベル Z_1^* を解析的に議論した。また、最後に各モデルの数値例を示した。

参考文献

- [1] Kodo Ito, Yoshiyuki Higuchhi, Toshio Nakagawa, "Optimal Maintenance Policy of Coastal Protection Systems", Proc. 24th ISSAT Int. Conf. on Reliability and Quality in Design (Toronto, Canada), 2018.
- [2] 伊藤弘道, 中川覃夫, 「社会インフラストラクチャの 最適保全方策」, 電子情報通信学会技術報告書, vol. 118, no. 365, R2018-45, pp. 13-16,2018 年.
- [3] Toshio Nakagawa, Shock and Damage Models in Reliability Theory, Springer, London, 2007.